Formale Potenzreihen & Erzeugende Funktionen

Referenz: [Halbeisen-Skript: Kapitel 11]

Sei R ein kommutativer unitärer Ring, und sei X ein noch nicht verwendetes Symbol.

Definition: (a) Ein „formaler Ausdruck" der Form

$$F(X) = \boxed{\sum_{i\geqslant 0} a_i X^i}$$

mit Koeffizienten $a_i \in R$ heisst eine *(formale) Potenzreihe in X über R.*

(b) Für je zwei Potenzreihen $F(X) = \sum_{i\geqslant 0} a_i X^i$ und $G(X) = \sum_{i\geqslant 0} b_i X^i$ setzen wir:

$$(F+G)(X) := F(X)+G(X) := \sum_{i\geqslant 0} (a_i+b_i)\cdot X^i,$$

$$(F\cdot G)(X) := F(X)\cdot G(X) := \sum_{i\geqslant 0} \Big(\sum_{j=0}^{i} a_{i-j}b_j\Big)\cdot X^i$$

$$\Big(\sum a_i X^i\Big)\cdot\Big(\sum b_j X^j\Big) = \sum_{i,j} a_i b_j X^{i+j} = \sum_{k\geq 0}\Big(\sum_{\substack{i,j\geq 0\\ i+j=k}} a_i b_j\Big) X^k$$

Proposition-Definition: Die Menge $R[[X]]$ aller Potenzreihen in X über R mit den obigen Operationen, dem *Nullelement* $0 = \sum_{i\geqslant 0} 0\cdot X^i$ und dem *Einselement* $1 = \sum_{i\geqslant 0} \delta_{i,0}\cdot X^i$ ist ein kommutativer unitärer Ring, genannt der *Potenzreihenring in X über R.*

Konstruktion: Eine Potenzreihe $\sum_{i\geqslant 0} a_i X^i$ anzugeben ist nach Definition äquivalent dazu, ihre Koeffizienten anzugeben. Man kann den Potenzreihenring daher konkret realisieren als die Menge aller Folgen $(a_i)_{i\geqslant 0}$ in R (ohne Endlichkeitsbedingung), mit komponentenweiser Addition und skalarer Multiplikation sowie dem Produkt $(a_i)_i \cdot (b_i)_i := \big(\sum_{j=0}^{i} a_{i-j} b_j\big)_i$. Dabei repräsentieren die Folge $(0, 0, \ldots)$ das Nullelement, die Folge $(1, 0, 0, \ldots)$ das Einselement, und die Folge $(0, 1, 0, 0, \ldots)$ das Variablensymbol X.

Vorsicht: Eine Potenzreihe ist nur eine Formel, hat also zunächst nichts mit Konvergenz zu tun.

Bemerkung: Sind alle bis auf endliche viele Koeffizienten a_i gleich Null, so ist $\sum_{i\geqslant 0} a_i X^i$ ein *Polynom.* Die Menge aller Polynome bildet den unitären Unterring $R[X]$ von $R[[X]]$.

Vorsicht: Eine Potenzreihe, die nicht schon ein Polynom ist, kann man im Allgemeinen nicht auswerten, da der Ausdruck $\sum\limits_{i\geqslant 0} a_i x^i$ für $x \in R$ keinen Sinn ergibt. Deshalb induziert eine Potenzreihe im Allgemeinen *keine Funktion.*

Vorsicht: Selbst wenn auf R ein Begriff der Konvergenz definiert ist, und wenn eine Potenzreihe eine konvergente Funktion $R \to R$ induziert, sollte man diese Funktion nicht mit der Potenzreihe verwechseln.

Beispiel: *Geometrische Reihe:* Für jedes $a \in R$ und jedes $k \geqslant 1$ ist $1 - aX^k$ invertierbar in $R[[X]]$ mit dem Inversen

$$\boxed{\sum_{i\geqslant 0} a^i X^{ki}.}$$

Beweis: $(1-aX^k)\cdot \sum_{i\geq 0} a^i X^{ki} = \sum_{i=0}^{\infty} a^i X^{ki} - \underbrace{\sum_{i=0}^{\infty} a^{i+1} X^{k(i+1)}}$

$- \sum_{j=1}^{\infty} a^j X^{kj} \quad = a^0 X^0 = 1.$ qed.

Proposition: Eine Potenzreihe $\boxed{F(X) = \sum_{i\geqslant 0} a_i X^i}$ ist genau dann invertierbar in $R[[X]]$, wenn a_0 invertierbar in R ist.

Beweis: Sei $G(X) = \sum_{j\geq 0} b_j X^j \Longrightarrow F\cdot G = \sum_{k\geq 0} \Big(\sum_{\substack{i+j=k \\ i,j\geq 0}} a_i b_j \Big) X^k$

Also ist $FG = 1 \iff \left\{ \begin{array}{l} a_0 b_0 = 1 \\ \text{und} \\ \sum_{i+j=k} a_i b_j = 0 \quad \text{für alle } k \geq 1 \end{array} \right\} \iff \left\{ \begin{array}{l} a_0 b_0 = 1 \quad \text{und} \\ a_0 b_k + a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0 = 0. \end{array} \right.$

$\Rightarrow$ Notwendig: $a_0 b_0 = 1 \Rightarrow a_0$ invertierbar.

Umgekehrt sei a_0 invertierbar.

Dann setze $b_0 := \frac{1}{a_0}$, und $b_k = -\frac{1}{a_0}\cdot\left(a_1 b_{k-1} + \dots + a_k b_0\right)$ für alle $k \geq 1$.

qed.

Variante: Ein „formaler Ausdruck“ der Form $\boxed{\sum_{i \geqslant i_0} a_i X^i}$ mit Koeffizienten in einem Körper K und einem $i_0 \in \mathbb{Z}$ heisst eine *(formale) Laurentreihe mit endlichem Hauptteil über K*. Summe und Produkt von solchen ist definiert durch dieselben Formeln wie für Potenzreihen. Die Menge $K((X))$ aller solchen Laurentreihen wird damit ein Körper.

$$F = \sum_{i \geq i_0} a_i X^i \quad \text{mit } a_{i_0} \neq 0 \implies F = \underbrace{X^{i_0}}_{\text{invertierbar}} \cdot \underbrace{\sum_{i \geq i_0} a_i X^{i-i_0}}_{\text{Potenzreihe invertierbar}}$$

X^{-i_0}

Variante: Der Ring der Potenzreihen in endlich vielen Variablen kann induktiv konstruiert werden durch

$$R[[X_1, \ldots, X_n]] \ := \ R[[X_1, \ldots, X_{n-1}]][[X_n]].$$

Definition: Für ganze Zahlen $n \geqslant k \geqslant 0$ ist der *Binomialkoeffizient „n tief k“* definiert durch

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \boxed{\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}}.$$

Bedeutung: Anzahl der k-elementigen Teilmengen Y einer Menge X mit n Elementen.

Y = Bild einer injektiven Funktion $\underset{\{0,1,\ldots,k-1\}}{\overset{\shortparallel}{k}} \to X$.

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$$

Grundeigenschaften:

(a) Für alle $n \geqslant k \geqslant 0$ gilt $\binom{n}{k} \in \mathbb{Z}$.

(b) Für alle $n \geqslant 0$ gilt $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$.

(c) Für alle $n \geqslant k \geqslant 0$ gilt $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

(d) Für alle $n > k > 0$ gilt $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

$X = \underbrace{X'}_{n-1} \cup \underbrace{\{x\}}_{1}$

$\cup\!\vert$

$Y = \underbrace{Y'}_{k}$ oder $\underbrace{Y'}_{k-1} \cup \underbrace{\{x\}}$.

Binomische Formel: Für alle $n \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt

$$\boxed{(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot X^k.}$$

$$(1+X)^n = \prod_{i=1}^{n} (1+X)$$

Proposition: Für alle $m, n, k \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt

$$\boxed{\binom{m+n}{k} = \sum_{\substack{r,s \geqslant 0 \\ r+s=k}} \binom{m}{r} \cdot \binom{n}{s}.}$$

$$\sum_{k=0}^{m+n} \binom{m+n}{k} X^k$$

$\shortparallel$

$$(1+X)^{m+n} = (1+X)^m \cdot (1+X)^n = \left(\sum_{r=0}^{m} \binom{m}{r} X^r\right) \cdot \left(\sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} X^s\right) = \sum_{k=0}^{m+n} \left(\sum_{r+s=k} \binom{m}{r}\binom{n}{s} \right) \cdot X^k.$$

Sei jetzt R ein Ring, der $\mathbb{Q}$ als Unterring enthält.

Definition: Für jedes $a \in R$ und jede ganze Zahl $k \geqslant 0$ ist der *verallgemeinerte Binomialkoeffizient* „a tief k" definiert durch

$$\boxed{\binom{a}{k} := \frac{a(a-1)\cdots(a-k+1)}{k(k-1)\cdots 1} \in R.}$$

Proposition: Für alle $a, b \in R$ und alle $k \in \mathbb{Z}^{\geqslant 0}$ gilt

$$\boxed{\binom{a+b}{k} = \sum_{\substack{r,s\geqslant 0\\ r+s=k}} \binom{a}{r} \cdot \binom{b}{s}.}$$

Bew.: Genügt für unabhängige Variable A, B in $\mathbb{Q}[A,B]$.
Sei $F(A,B) := \binom{A+B}{k} - \sum_{r+s=k} \binom{A}{r}\binom{B}{s} \in \mathbb{Q}[A,B]$.
Für jedes $a \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ ist $F(a,B) \in \mathbb{Q}[B]$. und für alle $b \in \mathbb{Z}^{\geq 0}$ gilt $F(a,b) = 0$.
$\Rightarrow F(a,B) = 0$. Schreibe $F(A,B) = \sum'_{k\geq 0} F_k(A) \cdot B^k$ $\Rightarrow \forall k: F_k(a) = 0$.
$F_k \in \mathbb{Q}[A]$. Variiere a $\Rightarrow F_k = 0$ in $\mathbb{Q}[A]$. Also ist $F(A,B) = 0$. qed

Definition: Die *allgemeine Binomialreihe mit dem Exponenten $a \in R$* ist die Potenzreihe

$$\boxed{\text{"}(1+X)^a\text{"} := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a}{k} \cdot X^k \in R[[X]].}$$

Proposition: Für alle $a, b \in R$ gilt

$$(1+X)^{a+b} \; = \; (1+X)^a \cdot (1+X)^b.$$

$$(1+X)^{a+b} = \sum_{k\geq 0} \binom{a+b}{k} X^k = \sum_{k\geq 0} \Big(\sum_{r+s=k} \binom{a}{r}\binom{b}{s} \Big) X^k = \Big(\sum_{r\geq 0} \binom{a}{r} X^r\Big) \cdot \Big(\sum_{s\geq 0} \binom{b}{s} X^s\Big) =$$
$$= (1+X)^a \cdot (1+X)^b.$$

Folge: Für alle $a \in R$ gilt

$$\frac{1}{(1-X)^a} \; = \; (1-X)^{-a} \; = \; \sum_{k=0}^{\infty} \binom{a+k-1}{k} \cdot X^k.$$

$$(1-X)^a (1-X)^{-a} = (1-X)^{a-a} = (1-X)^0 = 1$$

$$(1-X)^{-a} = \sum_{k\geq 0} \binom{-a}{k} \cdot (-X)^k = \sum_{k\geq 0} \frac{\overbrace{(-a)(-a-1)\ldots(-a-k+1)}^{k \text{ Faktoren}}}{k!} (-1)^k \cdot X^k$$
$$= \sum_{k\geq 0} \frac{a(a+1)\ldots(a+k-1)}{k!} \cdot X^k = \sum_{k\geq 0} \binom{a+k-1}{k} X^k.$$

Beispiel:

$$(1-X)^{-1} \; = \; \sum_{k=0}^{\infty} X^k \qquad \text{und} \qquad (1-X)^{-2} \; = \; \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) X^k \qquad \text{und so weiter.}$$

$$\sum_k \binom{k}{k} X^k \qquad\qquad \sum_k \binom{k+1}{k} X^k$$

Definition: Die formale Potenzreihe $F(X) = \sum_{i \geqslant 0} a_i X^i$ heisst auch *erzeugende Funktion* der Folge $(a_i)_i$.

Bemerkung: Eigenschaften der Folge entsprechen dann Eigenschaften der Potenzreihe. Durch Manipulation der Potenzreihe lassen sich eine Reihe solcher Eigenschaften gut beweisen.

Satz: Sei K ein Körper und $F(X) = \sum_{i \geqslant i_0} a_i X^i$ eine formale Laurentreihe in $K((X))$. Dann existieren $p, q \in K[X]$ mit $q \neq 0$ mit $\boxed{F = \frac{p}{q}}$ genau dann, wenn $d \geqslant 0$ und Koeffizienten $c_1, \ldots, c_d \in K$ existieren, so dass für alle $i \gg 0$ gilt

$$\boxed{a_n = \sum_{i=1}^{d} c_i a_{n-i}.}$$

Bew.: Es ist $F = \frac{p}{q} \iff q \cdot F = p \iff q \cdot F$ Polynom in X, X^{-1}.

Schreibe $q = X^m \cdot g$ mit $g = 1 - \sum_{i=1}^{d} c_i X^i$ mit $c_i \in K$, $d \geq 0$.

Dann ist $q \cdot F = X^m \cdot \left(1 - \sum c_i X^i\right) \cdot \sum a_j X^j = \sum_j a_j X^{j+m} - \sum_j \sum_{i=1}^{d} c_i a_j X^{j+i+m}$ $\quad j+i=l$

$= \sum_l a_l X^{l+m} - \sum_l \left(\sum_{i=1}^{d} c_i a_{l-i} \right) X^{l+m} = \sum_l \left(a_l - \sum_{i=1}^{d} c_i a_{l-i} \right) X^{l+m}.$

OK wenn fast alle Terme verschwinden, d.h. $\forall l \gg 0$: $a_l - \sum_{i=1}^{d} c_i a_{l-i} = 0$.

qed.

Beispiel: Die *Fibonacci-Zahlen* sind definiert durch $F_0 := 0$ und $F_1 := 1$ und $F_n := F_{n-1} + F_{n-2}$ für alle $n \geqslant 2$. Damit gilt

$$F(X) \;:=\; \sum_{n\geqslant 0} F_n \cdot X^n \;=\; \frac{X}{1-X-X^2} \;=\; \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\frac{1}{1-\alpha X} - \frac{1}{1-\beta X} \right)$$

mit $\alpha := \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ und $\beta := \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ und folglich

$$F_n \;=\; \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

$$F(X) = 0 \cdot X^0 + 1 \cdot X^1 + \sum_{n\geq 2} (F_{n-1} + F_{n-2}) X^n$$
$$= X + \sum_{n\geq 2} F_{n-1} X^n + \sum_{n\geq 2} F_{n-2} X^n$$
$$= X + \sum_{m\geq 1} F_m X^{m+1} + \sum_{m\geq 0} F_m X^{m+2}$$
$$= X + F \cdot X + F \cdot X^2$$
$$\Rightarrow (1-X-X^2) \cdot F = X$$
$$\Rightarrow F = \frac{X}{1-X-X^2}$$

$$F = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\sum_{n\geq 0} (\alpha X)^n - \sum_{n\geq 0} (\beta X)^n \right)$$
$$= \sum_{n\geq 0} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} \cdot X^n$$
$$\Rightarrow F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}}.$$

Sind Zahlen a_i als Summen definiert, so lässt sich manchmal mittels ihrer erzeugenden Funktion eine geschlossene Formel herleiten.

Beispiel: Für alle ganzen Zahlen $0 \leqslant q \leqslant n$ gilt

$$a_{qn} := \boxed{\sum_{k=q}^{n} \binom{n}{k} \cdot \binom{k}{q} = \ldots \binom{n}{q} \cdot 2^{n-q}}\ .$$

$$(1-y)^{-a} = \sum_{k\geq 0} \binom{a+k-1}{k} y^k = \sum_{k\geq 0} \binom{a+k-1}{a-1} y^k = \sum_{\ell \geq a-1} \binom{\ell}{a-1} y^{\ell+1-a}$$

$$a-1 = k \qquad -a = -1-k$$

$$F := \underline{\sum_{n\geq q\geq 0} a_{qn} x^q y^n} = \sum_{n\geq k\geq q\geq 0} \binom{n}{k}\binom{k}{q} x^q y^n = \sum_{k\geq 0} \Big(\underbrace{\sum_{n\geq k} \binom{n}{k} y^n}_{= (1-y)^{-k-1} \cdot y^k}\Big) \cdot \Big(\underbrace{\sum_{0\leq q\leq k} \binom{k}{q} \cdot x^q}_{(1+x)^k}\Big)$$

$$= \sum_{k\geq 0} \frac{(1+x)^k \cdot y^k}{(1-y)^{k+1}} = \sum_{k\geq 0} \left(\frac{(1+x)y}{1-y}\right)^k \cdot \frac{1}{1-y}$$

$$= \frac{1}{1-y} \cdot \frac{1}{1-\frac{(1+x)y}{1-y}} = \frac{1}{(1-y)-(1+x)y} = \frac{1}{1-2y-xy}$$

$$= \sum_{n\geq 0} (2y+xy)^n = \sum_{n\geq 0} y^n \cdot \sum_{0\leq q\leq n} \binom{n}{q} \cdot 2^{n-q} \cdot x^q$$

$$= \underline{\sum_{n\geq q\geq 0} \binom{n}{q} 2^{n-q} \cdot x^q y^n}$$

Definition: Die *formale Ableitung* von $F = \sum_{i \geqslant 0} a_i X^i$ ist definiert als

$$\boxed{F' := \frac{dF}{dX} := \sum_{i \geqslant 1} a_i i X^{i-1}.}$$

Grundeigenschaften:

$(f+g)'$	$=$	$f' + g'$
$(a \cdot f)'$	$=$	$a \cdot f'$
$(f \cdot g)'$	$=$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\left(\frac{f}{g}\right)'$	$=$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

$$\frac{f}{g} \cdot g = f$$

Beispiel: Für die durch

$$\underline{a_0 := 1} \qquad \text{und} \qquad \underline{a_{n+1} := \frac{a_n + \frac{1}{n!}}{n+1}}$$

definierte Folge gilt

$$\boxed{a_n = \ldots \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} \quad .}$$

$$F(X) := \sum_{n \geq 0} a_n X^n = 1 + \sum_{n \geq 0} \left(\frac{a_n + \frac{1}{n!}}{n+1} \right) \cdot X^{n+1}$$

$$\Rightarrow F' = \sum_{n \geq 0} \left(a_n + \frac{1}{n!}\right) X^n = F + \exp(X)$$

Homogene Gleichung $F' = F$ hat Fundamentallösung $\exp(X)$

Ansatz $F = C \cdot \exp(X)$

$\Rightarrow$ „$F' = C' \cdot \exp(X) + \underline{C \cdot \exp(X)}$"

$F + \exp(X) = \underline{C \cdot \exp(X)} + \exp(X)$

$\Rightarrow C' = 1.$

$\Rightarrow C = c + X$, c Konstante

$\Rightarrow F = (c+X) \cdot \exp(X) = (c+X) \cdot \sum_{n \geq 0} \frac{X^n}{n!}$

$a_0 = 1 \Rightarrow c = 1$

$\Rightarrow F = \sum \frac{X^n}{n!} + \sum \frac{X^{n+1}}{n!} = 1 + \sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n!} + \frac{1}{(n-1)!} \right) X^n$